证明直觉主义命题逻辑不能导出 Peirce 律和排中律 (精简版) (Work in Progress)

SOnion

September 21, 2018

(标题中 “精简版” 的意思是, 假设读者对矢列演算 (sequent calculus, 又译相继式演算 等) 有一定了解, 进而文中不做过多解释; 可能会写一个扩展版, 以此为切入点来介绍矢列演算⋯⋯)

本文通过在直觉主义命题逻辑的一个矢列演算系统 G3ip 中进行反向证明搜索, 证明了矢列 $\Rightarrow ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ 和 $\Rightarrow \alpha \vee \neg\alpha$ 不可在 G3ip 被导出, 即证明了 $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ (Peirce 律) 和 $\alpha \vee \neg\alpha$ (排中律) 不是直觉主义命题逻辑的定理.

G3ip 是一个表达(? “形式化了”? 用啥词好呢) 了直觉主义命题逻辑的矢列演算系统, 它由直觉主义一阶逻辑的一个矢列演算系统 G3i 删去四个关于量词的规则而得到 (G3i 于 1996 年由 Troelstra 和 Schwichtenberg 在《Basic Proof Theory》中引入). G3ip 的规则如下:

$$\frac{}{p, \Gamma \Rightarrow p}\ (\mathrm{AX}) \qquad\qquad \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \alpha}\ (\mathrm{L}\bot)$$

$$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \Rightarrow \delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \Rightarrow \delta}\ (\mathrm{L}\wedge) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta}\ (\mathrm{R}\wedge)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \delta \qquad \beta, \Gamma \Rightarrow \delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \Rightarrow \delta}\ (\mathrm{L}\vee) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}(\mathrm{R}\vee_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}(\mathrm{R}\vee_R)$$

$$\frac{\alpha \to \beta, \Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \beta, \Gamma \Rightarrow \delta}{\alpha \to \beta, \Gamma \Rightarrow \delta}\ (\mathrm{L}\to) \qquad\qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \to \beta}\ (\mathrm{R}\to)$$

其中 α, β, δ 是公式, p 是原子命题, Γ 是公式的多重集; $\bot$ 定义成一个零元联结词, 对任意公式 α 将 $\neg\alpha$ 定义为 $\alpha \to \bot$. 值得注意的是, G3ip 中矢列的前件和后件, 都是公式的多重集, 而不是序列或集合 (作为对比, Gentzen 最初提出的矢列演算系统 LK 和 LJ 里面的矢列的前件和后件都是序列, 因此需要 permutation 规则来调整公式的顺序).

由于反向证明搜索从结论出发, 为了方便表述搜索过程, 本文倒着写证明树, 即: 树根 (待证矢列) 写在最上方; 规则的应用中, 结论写在上方, 前提写在下方.

Peirce 律不可导出

从待证矢列 $\Rightarrow ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ 出发开始搜索. 在搜索的前几步, 可使用的规则是唯一的, 直到遇到证明枝 (1):

$$\cfrac{\Rightarrow ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha}{\cfrac{(\alpha \to \beta) \to \alpha \Rightarrow \alpha}{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{}\ (\mathrm{AX}) \qquad \dfrac{(\alpha \to \beta) \to \alpha \Rightarrow \alpha \to \beta}{}\ (1)}\ (\mathrm{L}\to)}\ (\mathrm{R}\to)$$

未封闭的证明枝 (1) 有两种可行选择: 使用规则 (R→) 或 (L→). 先尝试 (R→):

$$\cfrac{(\alpha \to \beta) \to \alpha \Rightarrow \alpha \to \beta}{\cfrac{\alpha, (\alpha \to \beta) \to \alpha \Rightarrow \beta}{(\alpha \to \beta) \to \alpha, \alpha \Rightarrow \alpha \to \beta \qquad \dfrac{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta}{}\ (2)}\ (\mathrm{L}\to)}\ (\mathrm{R}\to)$$

每一步的规则选择都是唯一的, 由此必然产生的未封闭的证明枝 (2), 而 (2) 处已经无规则可用, 因此这个推导路线不可行. 回溯到 (1), 既然此处使用 (R→) 不可行, 那么只能选择 (L→):

$$\dfrac{(\alpha\to\beta)\to\alpha\Rightarrow\alpha\to\beta}{\alpha\Rightarrow\alpha\to\beta \qquad \dfrac{(\alpha\to\beta)\to\alpha\Rightarrow\alpha\to\beta}{}\ (3)}\ (\mathrm{L}\to)$$

使用 (L→) 立即产生了证明枝 (3), 而 (3) 的矢列与 (1) 的一样, 产生循环, 因此这个推导路线也不可行. 事实上 (L→) 规则中一旦 $\alpha=\delta$, 就会产生循环.

所以任何一个推导路线都不可行, 即 $\mathsf{G3ip} \nvdash\ \Rightarrow ((\alpha\to\beta)\to\alpha)\to\alpha$, 所以 Peirce 律 $((\alpha\to\beta)\to\alpha)\to\alpha$ 在直觉主义命题逻辑中不是定理.

排中律不可导出

$\alpha\vee\neg\alpha$ 是 $\alpha\vee(\alpha\to\bot)$ 的缩写, 由此开始反向证明搜索. 主联结词是 $\vee$, 因此可以使用 ($\mathrm{R}\vee_L$) 或 ($\mathrm{R}\vee_R$). 先尝试 ($\mathrm{R}\vee_L$):

$$\dfrac{\Rightarrow\alpha\vee(\alpha\to\bot)}{\dfrac{\Rightarrow\alpha}{}\ (1)}\ (\mathrm{R}\vee_L)$$

在证明枝 (1) 处无规则可用, 回溯到开头尝试 ($\mathrm{R}\vee_R$):

$$\dfrac{\Rightarrow\alpha\vee(\alpha\to\bot)}{\dfrac{\Rightarrow\alpha\to\bot}{\dfrac{\alpha\Rightarrow\bot}{}\ (2)}\ (\mathrm{R}\to)}\ (\mathrm{R}\vee_R)$$

在证明枝 (2) 处无规则可用. 所有推导路线都不可行, 故排中律 $\alpha\vee\neg\alpha$ 在直觉主义命题逻辑中不是定理式.

附：本文使用的术语

我尽量用见过的翻译; 有些词我不确定中文里叫啥, 有些我不确定英文里叫啥; 有的词我不知道是否被广泛地 (按照我理解的含义) 被使用——主要是从老师那里听到的词.

1. sequent calculus - 矢列演算 (又译相继式演算等)
2. antecedent / succedent - 前件 / 后件 (矢列的分隔符 (有用 $\Rightarrow$ 的, 有用 $\vdash$ 的) 的左边和右边)
3. premise / conclusion - 前提 / 结论 (规则的大横线的上边和下边)
4. proof system, proof calculus - 证明系统 (如公理系统, 各种矢列演算, 各种自然演绎)
5. derive, deduce - 导出, 推导 (使用证明系统的规则来推导内定理, 如在 G3i 中推导 $\alpha\Rightarrow\alpha$)
6. (backward) proof search - (反向) 证明搜索
7. sequence / multiset / set - 序列 / 多重集 / 集合
8. ? - 内定理
9. ? - 证明枝

参考

1. 俞□ (□王君) 华老师的证明论课程，2017 春
2. Basic Proof Theory 2nd Edition
3. A terminating evaluation-driven variant of G3i https://homes.di.unimi.it/fiorentini/download/slidesTableaux2013.pdf